Procesy stochastyczne

Lista 3

Zad 1. Niech τ_1, τ_2 będą momentami stopu względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$. Udowodnij, że $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ oraz $\tau_1 \vee \tau_2 = \max\{\tau_1, \tau_2\}$ też są momentami stopu względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$.

Zad 2. Niech τ będzie momentem stopu względem $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Czy wynika stąd, że momentem stopu jest:
a) $\tau + 1$ *b)* $\tau - 1$ *c)* τ^2?

Zad 3. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zmiennych losowych adaptowanym do filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

a) Niech τ będzie momentem stopu względem $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Wykazać, że chwila pierwszej wizyty w zbiorze $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ po chwili τ też jest momentem stopu względem $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) Zdefiniować k-ty moment wizyty $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ w zbiorze $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i udowodnić, że jest on momentem stopu.

Zad 4. Wykazać, ze jeśli σ i τ są momentami zatrzymania, to zdarzenia $\{\sigma < \tau\}$, $\{\sigma = \tau\}$ i $\{\sigma \leq \tau\}$ należą do $\mathcal{F}_\tau$, $\mathcal{F}_\sigma$ i $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$.

Zad 5. Niech $\{F_t\}_{t\in T}$ będzie filtracją, gdzie T jest przedziałem (skończonym lub nie). Pokazać, że wzory

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \qquad \mathcal{F}_{t-} := \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right).$$

określają filtracje takie, że

a) $\{F_{t+}\}_{t\in T}$ jest prawostronnie ciągła, tj. $F_{t++} = \mathcal{F}_{t+}$;

b) jeśli $F_t = \mathcal{F}_t^X$ jest generowana przez proces X o trajektoriach lewostronnie ciągłych, to $F_{t-} = \mathcal{F}_t$.

Zad 6. Wyznaczyć filtrację $\mathcal{F}_t^X$ generowaną przez proces stochastyczny $\{X_t\}_{t\geq 0\}}$, gdzie $X_t = (t-1)_+\mathbb{I}_A$ dla pewnego ustalonego $A \in \mathcal{F}$. Wykazać, że $\tau = \inf\{t : X_t > 0\}$ nie jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^X$ ale jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}^X$.

Zad 7. Niech $\{F_t\}_{t\in T}$ będzie filtracją, gdzie T jest przedziałem (skończonym lub nie). Pokazać, że

a) jeśli τ jest momentem zatrzymania względem F_t, to $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t;

b) jeśli $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t, jest τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

Zad 8. Niech $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)\}}$ procesem o ciągłych trajektoriach adoptowanym do filtracji $\mathcal{F}_t$. Wykazać, że dla dowolnego otwartego zbioru A, $\tau := \inf\{t : X_t \in A\}$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

Zad 9. Wykazać, że jeśli σ jest momentem zatrzymania, $\tau \geq \sigma$ oraz τ jest $\mathcal{F}_\sigma$ mierzalna, to τ jest momentem zatrzyamania.

Zad 10 (Tożsamość Walda)**.** Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie posiadającym wartość oczekiwaną m. Niech τ będzie momentem stopu względem filtracji generowanej przez $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ takim, że $E(\tau) < \infty$. Pokazać, że

$$E(X_1 + ... + X_\tau) = E(\tau) \cdot m.$$

Zad 11. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0,1)$. Niech $\tau = \min\{n : X_1 + X_2 + ... + X_n \geq 1\}$. Wyznaczyć $E(\tau)$.

Zad 12. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym: $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, oraz niech $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, ..., X_n)$.

a) Pokazać, że $\tau := \min\{n \leq 2 : X_1 + X_2 + ... + X_n = 1\}$ jest momentem stopu i wyznaczyć $\mathcal{F}_\tau$. Jaki jest związek $\mathcal{F}_\tau$ z $\sigma(\tau)$?

b) Pokazać, że $\sigma := \max\{n \leq 10 : X_1 + X_2 + ... + X_n = 1\}$ nie jest momentem stopu.

c) Pokazać, że $\tau := \inf\{n : X_1 + X_2 + ... + X_n = 1\}$ jest momentem stopu oraz $E(\tau) = \infty$.

Zad 13. Rzucamy kostką tak długo, aż otrzymamy wszystkie oczka. Znaleźć wartość średnią sumy wyrzuconych oczek.